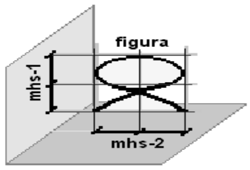
MHS LISSAJOUS

Superposição de dois MHS com direções perpendiculares: Figuras de Lissajous

As **figuras de Lissajous** são estudadas como resultantes de superposições de dois movimentos harmônicos simples que se desenvolvem em direções perpendiculares. As trajetórias que se obtém com diferente combinações de frequências formam figuras interessantes.



Considere o caso em que a partícula se move num plano de modo que suas duas coordenadas x e y oscilam com movimento harmônico simples. A trajetória resultante (chamada figura de Lissajous) depende da razão entre as pulsações nos eixos x e y da diferença de fase δ. Quando as frequências são comensuráveis as trajetórias são fechadas e são escritas respectivamente. Caso contrário, elas são abertas e a figura pode ser extremamente complexa.

Analisando a diferença de fase δ pode-se determinar o sentido de percurso da figura (quando esta é uma elipse):

- Se $0 < \delta < \pi$ A elipse será descrita no sentido horário.
- Se $\pi < \delta < 2\pi$ A elipse será descrita no sentido anti-horário.

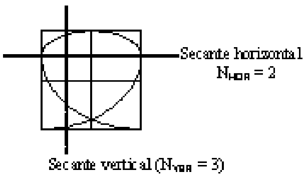
Quando as frequências são iguais as figuras formadas (trajetórias de partícula) será: uma reta , uma elipse ou uma circunferência, dependendo de A_1 , A_2 e δ .

Para o caso em que as frequências são diferentes a figura terá forma que poderá ser muito complicada.

Pode-se determinar a relação entre os períodos a partir do método das secantes; que consiste em traçar duas secantes, uma vertical e outra horizontal (não deixando estas retas passar por nenhum ponto de interseção da curva); seja N_{HOR} o número de interseções da secante horizontal com a figura de Lissajous e N_{ver} o número de interseções da secante vertical com a mesma figura, tem-se que:

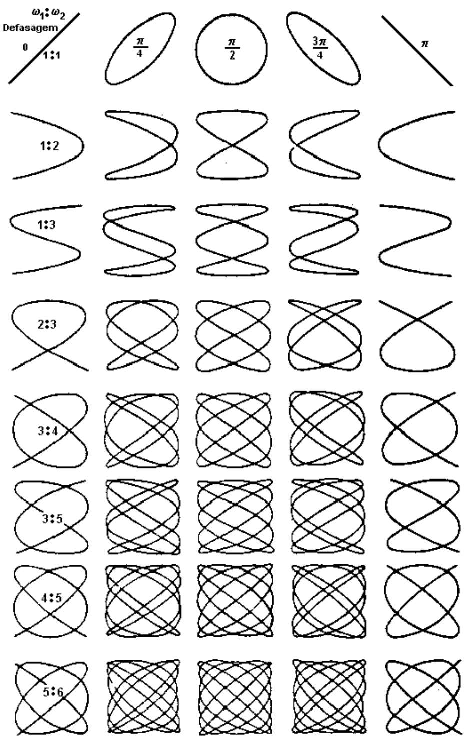
$$\frac{T_{HOR}}{T_{VER}} = \frac{N_{HOR}}{N_{VER}}$$

Exemplo:



Temos, portanto $\frac{T_{HOR}}{T_{VER}} = \frac{2}{3}$

Abaixo temos alguns exemplos de figuras de Lissajous, para diferentes defasagens e diferentes frequências:

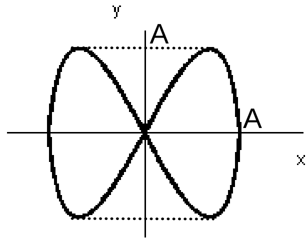


LISTA LISSAJOUS

01. Esquematize a trajetória de uma partícula que se move no plano *xy* de acordo com as equações: $x = x_m \cos(\omega t - \pi/2)$ e $y = 2x_m \cos(\omega t)$.

02. O diagrama mostrado na abaixo é o resultado da combinação de dois movimentos harmônicos simples $x = x_m \cos(\omega_x t)$ e $y = y_m \cos(\omega_y t + \phi_y)$.

a) Qual é o valor de x_m/y_m ?
b) Qual é o valor de ω_x/ω_y ?
c) Qual é o valor de ϕ_y ?



03. Os elétrons num osciloscópio são defletidos por dois campos de tal maneira que, em qualquer instante t, o deslocamento é dado por $x = A \cos(\omega t)$ e $y = A \cos(\omega t + \phi_y)$. Descreva a trajetória dos elétrons e determine sua equação quando

a) $\phi_y = 0°$
b) $\phi_y = 30°$
c) $\phi_y = 90°$

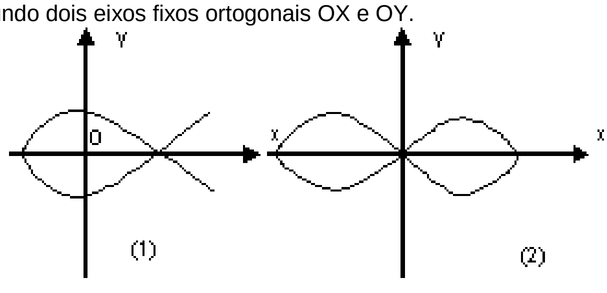
04. (ITA-SP) A propósito da trajetória resultante da composição de dois movimentos harmônicos simples, ortogonais entre si, descritos respectivamente pela equações horárias: $X = A \text{ sen } (\omega_1 t + \alpha)$ e $Y = B \text{ sen } (\omega_2 t + \beta)$ podemos afirmar que:

a) Será sempre uma reta desde que A = B
b) Será uma figura de Lissajous somente quando $\alpha = \beta$
c) Nunca será uma reta se $W_1 \neq W_2$
d) Será sempre uma circunferência desde que $\alpha - \beta = \pm \pi/2$.

05. (ITA-2001) Uma partícula descreve um movimento cujas coordenadas são dadas pelas seguintes equações: $X(t)=X_o.\cos(w.t)$ e $Y(t)=Y_o.\text{sen}(w.t+\pi/6)$, em que w, X_o e Y_o são constantes positivas. A trajetória da partícula é

a) Uma circunferência percorrida no sentido anti-horário.
b) Uma circunferência percorrida no sentido horário.
c) Uma elipse percorrida no sentido anti-horário.
d) Uma elipse percorrida no sentido horário.
e) Um segmento de reta.

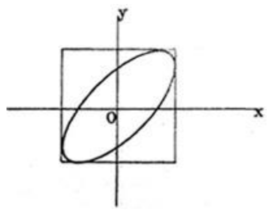
06. (MACK-SP) As figuras (1) e (2) abaixo indicadas são resultantes da composição de dois MHS de frequências respectivamente f_x e f_y segundo dois eixos fixos ortogonais OX e OY.



Nessas condições podemos afirmar que:

a) em (1): $f_x = 2 f_y/3$ b) em (2): $f_x = 2f_y$ c) em (1): $T_x = 2 T_y/3$
d) em (2): $T_x = 3f_y$ e) n.d.a

07. (ITA 1974) Na figura, que representa a combinação de dois movimentos harmônicos simples em eixos perpendiculares $x = A \text{sen} \omega t$ e $y = B \text{sen}(\omega t + a)$, sendo *a* um número positivo, qual das expressões abaixo não poderá representá-lo?



a) $\alpha = 0$ b) $0 < a \leq \frac{\pi}{2}$ c) $0 < a < \frac{\pi}{2}$

d) $0 < a < \pi$ e) $0 \leq a < \frac{3\pi}{2}$

08. Seja uma partícula que sofre a ação de uma força restauradora conforme se segue:

$$\begin{cases} F_x = -k \cdot r\cos\theta = -k \cdot x \\ F_y = -k \cdot r\,\text{sen}\,\theta = -k \cdot y \end{cases}$$

Resolvendo o problema, obtém-se como solução que a componente x, assim como a componente y, da partícula sofre um MHS. As equações a seguir podem então ser obtidas:

$$\begin{cases} x(t) = A\cos(\omega t - \alpha) \\ y(t) = B\cos(\omega t - \beta) \end{cases}$$

Chamando de $\delta = \alpha - \beta$ a diferença de fase inicial das partículas, mostre que:

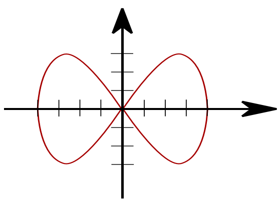
a) Caso $\delta = \pm\frac{\pi}{2}$, a trajetória da partícula será elíptica.

b) Ainda se $\delta = \pm\frac{\pi}{2}$ mas com $A = B$ temos um movimento circular. Geralmente parte-se deste resultado para obter as equações de movimento do MHS, sem apelar para a resolução do primeiro sistema apresentado nesta questão.

c) Caso $\delta = 0$ tem-se uma trajetória linear. Isto é, a partícula se move ao longo de uma reta. Por fim, se $\delta = \pm\pi$ tem uma outra reta.

09. Esquematize a trajetória de uma partícula quer se move no .plano xy de acordo com as equações $x = x_m\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$ e $y = 2x_m\cos(\omega t)$

10. O diagrama mostrado na figura ao lado é o resultado da combinação de dois movimentos harmônicos simples $x = x_m\cos(\omega_x t)$ e $y = y_m\cos(\omega_y t + \phi_y)$.



a) qual é o valor de x_m / y_m?

b) qual é o valor de ω_x / ω_y?

c) qual é o valor de ϕ_y?

11. Quando se combinam oscilações perpendiculares entre si, as frequências dos movimentos das partículas nas direções x e y não precisam ser iguais, portanto, no caso geral, as equações horárias da posição se tornam

$$\begin{cases} x = x_m\cos(\omega_x t + \phi_x) \\ y == y_m\cos(\omega_y t + \phi_y) \end{cases}$$

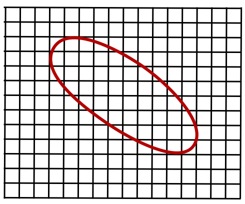
A trajetória da partícula não é mais uma elipse, mas sim uma linha denominada *curva de Lissajous*, em honra de Jules Antoine Lissajous que foi o primeiro a identificar tais curvas em 1857.

a) Se ω_x / ω_y for um número racional, então as frequências angulares serão “comensuráveis”, e a curva será fechada, isto é, o movimento se repetirá a intervalos de tempos iguais. Suponha que $x_m = y_m$ e que $\phi_x = \phi_y$, desenhe as curvas de Lissajous para $\omega_x / \omega_y = 1/2$, $1/3$ e $2/3$.

b) Sendo ω_x / ω_y um número racional, digamos $1/2$, $1/3$ ou $2/3$, mostre que a forma da curva de Lissajous depende da diferença de fase $\phi_x - \phi_y$. Desenhe as curvas para $\phi_x - \phi_y = 0$, $\pi/4$ e $\pi/2$ radianos e $\omega_x = \omega_y$.

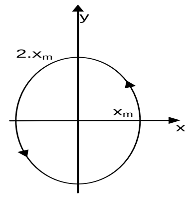
c) Se ω_x / ω_y não for um número racional, então a curva será “aberta”. Convença-se de que, após um longo tempo, a partícula terá passado por todos os pontos os pontos do retângulo limitado por $x = \pm x_m$ e $y = \pm y_m$. Ela nunca passará duas vezes por um dado ponto com a mesma velocidade. Para simplificar suponha que $\phi_x = 0$.

12. A figura a seguir mostra uma curva de Lissajous resultante da defasagem entre dois MHS de mesma frequência. Calcule a defasagem entres esses MHS.



GABARITO

01.



02. a) 1 **b)** 1/2 **c)** - π/2

03. a) reta y = x **b)** elipse rotacionada. **c)** circunferência de raio A

04. C **05.** C **06.** A

07. $\frac{\pi}{4}$

08. a) A equação que você deve encontrar é: $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$ para o caso em que $\delta = \pm\frac{\pi}{2}$

b) $x^2 + y^2 = A^2$ caso em que $A = B$ e $\delta = \frac{\pi}{2}$

c) $y = \frac{B}{A}x$ caso em que $\delta = 0$ e $y = -\frac{B}{A}x$ caso em que $\delta = \pm\pi$

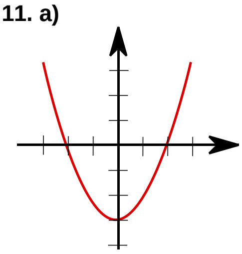
09. É uma elipse com semi-eixo maior na direção do eixo y.

10. a) De acordo com as escalas apresentadas no gráfico, $\frac{x_m}{y_m} = \frac{4}{3}$

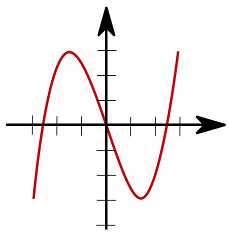
b) $\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{1}{2}$

c) Considere o ponto de interseção da trajetória com o eixo x. Se, neste ponto, a velocidade da partícula apontar para cima, então $\phi_y = -\frac{\pi}{2}$, agora se a velocidade apontar para baixo, então $\phi_y = \frac{\pi}{2}$. Como não é indicado na figura a direção, então não é possível ter certeza de qual das duas opções seriam.

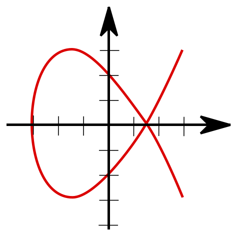
11. a)



Para $\omega_x / \omega_y = 1/2$

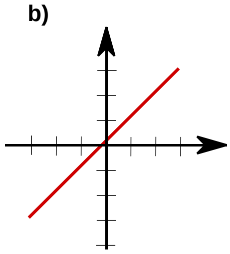


Para $\omega_x / \omega_y = 1/3$

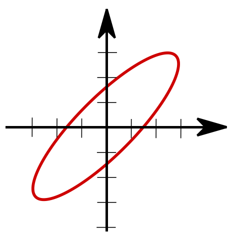


Para $\omega_x / \omega_y = 2/3$

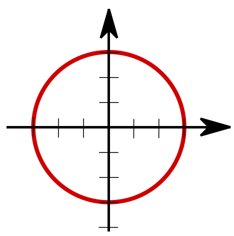
b)



Para $\phi_x - \phi_y = 0$

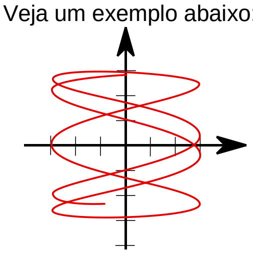


Para $\phi_x - \phi_y = \pi/4$



Para $\phi_x - \phi_y = \pi/2$

c) Demonstração. Veja um exemplo abaixo:



12. $\delta = \text{arcsen}(\pm\delta)$